

Výuka matematiky na Slovensku

príspevok na konferencii *Nové metody ve výuce matematiky?*
(Praha, 14.02.2018)

Po skončení univerzity v roku 1969 sa ujasnilo, že začnem učiť na Pražskej technike. Keďže som sa chcel stať **dobrym** učiteľom, tak som sa zamyslel, čo pre to môžem resp. musím urobiť a dospel som k takýmto uzáverom.

1. v triede môže sedieť **génius**, v budúcnosti nositeľ všetkých možných najvyšších ocenení!

Nie som génius, ale moje učenie musí byť dobré aj pre neho.

2. na rozdiel od mojich študentských čias, učivo teraz nebudem *ja ako žiak* vysvetľovať múdre mu učiteľovi, ale *ja ako učiteľ* to musím vedieť vysvetliť aj menej chápacému žiakovi, takže predovšetkým budem musieť čo najjasnejšie pochopiť veci ja sám.

3. **ak niečo bolo ťažké pochopiť mne, tak to bude asi ťažké pre väčšinu žiakov.**

4. keďže mám učiť budúcich inžinierov, tak – pri zachovaní matematickej presnosti – by som sa mal čo najviac snažiť o pokiaľ možno rukolapné vysvetlenia, **teda osvetliť problém z viacerých uhlov pohľadu**, čo najviac ich vizualizovať.

Mám za to, že tie zásady tvoria výborný základ pre to, aby sa niekto stal dobrým učiteľom. Všimnite si, že sú najmä o **odbornosti** a čiastočne o skromnosti.

Nič to nemení na tom, že na klasickú študentskú otázku *Mohu to říct vlastními slovy?* som síce vždy odpovedal áno, ale definícia resp. veta vlastnými slovami študenta takmer nikdy nedopadla dobre. Po takom pokuse som študentom vždy odporučil, aby sa učili definície a vety naspamäť. Hrozné, že. Ale aby si aj oni ujasnili, že prečo je to efektívnejšie, uviedol som im nasledovné:

„Tieto definície a vety v tomto období preberá určite vyše *stotisíc žiakov* na celom svete. Predstavte si, že každý žiak *vymyslí svoju vlastnú definíciu*. Ako ináč, každá taká definícia je jasnejšia, jednoduchšia a presnejšia, ako tá, ktorá je v knihe, teda tá, ktorú za dlhé desaťročia vyvinuli skúsení učitelia.“ Vždy sa ozvalo niekoľko študentov naraz: „To je blbosť!“ A zrazu ten povel k biftovaniu tak hrozný nebol.

A keď som v roku 1973 začal prednášať, tak som onedlho pridal k svojim uzáverom ešte tento:

„Neexistuje metóda učenia dobrá **pre každého!**“

*

Na technike som učil celý život, po dvoch rokoch v Prahe ešte 45 rokov v Žiline, od roku 1971 až do konca roku 2016. Od roku 1973 až dodnes pracujem aj v MO, z toho 9 rokov som bol predseda SKMO a 11-krát som viedol družstvo SR na IMO. A keďže som 9 rokov pracoval aj pre AK v pracovnej skupine Leva Bukovského, mal som možnosť pozorovať vývoj i úpadok vyučovania matematiky na základných, stredných aj vysokých školách. Ten úpadok nabral šialené tempo najmä koncom minulého tisícročia, keď v dôsledku hesla „Študent sa stane nositeľom balíka peňazí“ sa zaviedlo tzv. **platenie za kus**, vyjadrené vzorcom:

1 študent = 1 balík (peňazí).

Už na konferencii v Hejnicích v roku 2002 som predpovedal, že platenie za kus povedie k enormnej strate kvality, ak nič proti tomu neurobíme. Dnes môžem len s ľútosťou konštatovať, že som mal pravdu, lebo *ľudia, ktorých hlas je počut'* (termín od pána prof. Piťhu), odmietli počúvať odborníkov a presadzovať ich názory. Proste, nebola politická vôľa... Len výsledok je oveľa horší, ako som si vtedy dokázal predstaviť. V dôsledku platenia za kus na Slovensku (ale aj v Čechách) počet VŠ enormne narástol, **asi na 5-násobok**. Že prečo? No, zrejme je to **dobry biznis**... Dobry biznis je to už aj preto, že **nekvalita produktu sa obvykle zistí s obrovským spozdením a nie je ľahké dokázať, že produkt sa pokazil práve na tej škole**.

Enormné množstvo škôl, ako bezprostredný a logický dôsledok **platenia za kus**, vyžaduje aj **enormný počet učiteľov**, takže aj ich priemerná kvalita sa výrazne zhoršila. Navyše, enormný počet učiteľov neumožnil slušné veľkoplošné zvýšenie učiteľských plátov, ktoré by mohlo nalákať vzdelaných mladých ľudí do tejto profesie. Jeden z dôvodov, prečo sa mnohé západné univerzity môžu pýšiť kvalitnejšími pracoviskami je, že tamojšie platy zlákali takmer celú širšiu špičku mladých vzdelancov z V4 a priľahlého okolia, a práve tí im dvíhajú priemer. Takže z tých naozaj vzdelaných mladých ľudí pôsobia v učiteľskom zamestnaní v SR (a v celej V4 a priľahlého okolia) len tí, pre

ktorých je učenie povolaním, a aj z tých len časť. To je málo aj pre renomované VŠ, a nie pre ich 5-násobok, lebo k ich rozptylu samozrejme dochádza.

Nová metóda???

S veľkým prekvapením som zistil, že niekto našiel metódu, ktorou sa **každé** dieťa naučí matematiku, a dokonca s radosťou a bez tvrdej práce. Ide o tzv. Hejného metódu. Tak som sa s tou metódou chcel bližšie zoznámiť.

*

Metóda je zhrnutá do dvanástich bodov a podľa autora jej podstatou je **budovanie schém**.

Dobre, lenže deti si vytvárajú schémy automaticky, takže to nie je zásluha Hejného metódy.

Že som niečo zle pochopil, lebo *Hejného metóda schémy rozvíja?*

Dobre, ale aj iná metóda učenia schémy rozvíja – a dovoľte mi aj nepovolené nemravné slovo: **definuje** schémy! Autor o.i. píše, že

Schémata téhož se ve vědomí různých lidí liší. To může být příčinou nedorozumění.

No práve, veď schéma dostane jasný zmysel až potom, keď je presne definovaná. Schéma je totiž predstava. Kadleček (ale nie len on) vo svojich skriptách uviedol, že je úplne jedno, kto si čo predstavuje pod pojmi bod a priamka. Schémy pojmov začnú byť zaujímavé až potom, keď sa dohodneme na vlastnostiach. Napr.

dvomi rôznymi bodmi môžeme viesť práve jednu priamku.

Ak niekto nesúhlasí, tak sa **túto** matematiku učiť nebude. Ak však niekto súhlasí so všetkými vlastnosťami, tak to už **nie je schéma, ale zadefinovaný pojem** bez ohľadu na to, či niekto má alebo nemá averziu k slovu definícia.

Abstraktný pojem čísla sa objavuje napr. na **DUCK TV** už pre 2-3 -ročné deti:

prikotúľa sa hruška, vyskočí na prázdny stolček a vedľa sa objaví symbol **1**;
potom sa prikotúľa ďalšia hruška, vyskočí na ten 1-hruškový stolček a vedľa sa objaví symbol **2**;
potom sa prikotúľa ďalšia hruška, vyskočí na ten 2-hruškový stolček a vedľa sa objaví symbol **3**;
potom sa prikotúľa ďalšia hruška, vyskočí na ten 3-hruškový stolček a vedľa sa objaví symbol **4**.

Potom to urobia s mrkvou, potom s ježkom, aby si deti uvedomili, že abstraktný symbol **2** nie je len pre dve hrušky, ale aj pre dve mrkvy, ...

Niekedy to robia aj pre väčšie deti a robia to až po **8. Budujú schémy.**

Ešte dve schémy.

Prvá. Raz jeden žiak slovenského IMO-družstva pri debate povedal, že on nesúhlasí s tým, že postupnosť $1, -1, 1, -1, 1, \dots$ nemá limitu, lebo on to vidí ináč. Povzbudil som ho: „Povedz **svoju** definíciu limity postupnosti. Možno sa pomocou Tvojej definície dostaneme k zaujímavým výsledkom. Ved' ak v 5. Euklidovom postuláte dáme aspoň dve rovnobežky, vznikne čosi hodne zaujímavé.” Odmietol definovať, len trval na tom, že to vidí ináč. Keď situáciu sformulujem v Hejného terminológii, tak **chlapec mal vytvorenú schému** pojmu *blížiť sa = konvergovať*, ale jeho predstava nebola celkom jasná – a určite bola chybná.

Druhá. Erdős občas pátral, na ktorej základnej škole majú talentované deti a potom sa dohodol, že tam odučí (bez nároku na honorár) hodinu. Ľahko sa dostali v 5. triede cez počet priesečníkov dvoch priamok, potom troch. Samozrejme, začal sa venovať rovnobežnosti priamok a chcel po deťoch, aby mu vysvetlili, ako to vidia. Na otázku, či sa dá viesť rovnobežka s danou priamkou takým bodom, ktorý na tej priamke neleží, bola odpoveď blesková: áno. Na **počet** takých priamok bola odpoveď tiež veľmi rýchla: jedna. Ale prihlásilo sa dievčatko, ktoré určite nečítalo Bolyai-Lobačevského geometriu – ved' ešte sa neoboznámilo ani s Euklidovskou, a povedalo: Prosím, ja to vidím ináč. Opísala to takto. Vedím tým bodom priamku, ktorá tú danú pretína. Potom ju začnem pomaly otáčať okolo toho bodu a stále sa budú pretínať, až v jednej chvíli sa odrazí od danej priamky a vtedy už nemajú spoločný bod, lebo sú rovnobežné. A potom to isté urobím na druhú stranu a dostanem ďalšiu rovnobežku. Na Erdősovu otázku, že či tie dve nie sú zhodné odpovedala, že neviem, ale podľa mňa nie.

Ďalej sa v charakteristike Hejného metódy objaví, že *podporujeme rôznosť názorov*. Nuž, tu by som bol veľmi opatrný, lebo nemôže byť $2+3=4$, čo sa pri krokovacej metóde príliš dlho rozoberá. Nie všetky názory majú v matematike čo hľadať. Ak nezmysel nezastavia dostatočne rýchle spolužiaci, mal by tak

urobiť učiteľ, lebo potom mu **nezvýši čas** na mnoho iných potrebných vecí. Ono totiž Hejného metóda vyzdvihuje, že dieťa pri samostatnom bádání neraz zistí, že *tadiaľ cesta nevedie*. Je to vraj dobré, lebo hlbšie pochopí problém. Súhlasím! Aj veľkí vedci sa neraz dostali do slepej uličky, ale obvykle nie preto, že sa nezoznámili s tým, čo už iní pred nimi zistili. Ono totiž **preskúvanie všetkých ciest, ktoré nikam nevedú, je časovo neobmedzené**. A práve toho času je málo.

Apropó, ten vyššie spomenutý druhý príbeh je nielen o schéme, ale aj o rôznosti názorov. Môžu byť rôzne názory, ale treba byť opatrný. Kvalitné vzdelanie učiteľa a skromnosť pritom nie je na škodu.

Myslím, že toľko by o schémach a rôznych názoroch stačilo.

*

V opise Hejného metódy je aj veta, že *Skúsenosti a názory dieťaťa sú konfrontované so skúsenosťou a názormi spolužiakov*.

Dobre, ale prečo nie učiteľa? Ten nemá skúsenosti alebo nemá názor?

Ďalej sa konštatuje, že *deti sú pozorné a vnímavé ku svojim spolužiakom*.

Moja otázka: prečo nie aj k učiteľovi? Žeby na jeho názory neboli zvedavé preto, lebo už zistili, že jeho vedomosti sú chatrné?

*

Spomínaná je podpora spolupráce: *deti pracujú v skupinkách, prípadne aj samostatne. Každý žiak je tak schopný povedať ako k výsledku došiel a je schopný to vysvetliť aj ostatným*.

Tak toto určite neplatí! Predovšetkým, **nie každý** žiak, ktorý pracoval samostatne, došiel k výsledku. A ak pracovali v skupine, tak **nie každý člen** skupiny to vie vysvetliť ostatným. Okrem toho je pozoruhodné, že deti, ktoré rozumejú vysvetleniu spolužiaka, nerozumejú vysvetleniu učiteľa. Možno je učiteľ priveľmi vzdelaný, takže s deťmi, ktoré má rád, nevie nájsť spoločnú reč. Spolupráca je dobrá vec, ale potom príde napr. MO:

Ty sám, tu, teraz a bez pomoci!

V živote je veľa vecí tohto typu práve preto, aby nemohli zvalovať vinu jeden na druhého:

za volantom autobusu sedí **jeden** vodič, šaty na mieru ušije **jeden** krajčír, polievku solí **jeden** kuchár, áriu Nessun dorma spieva **jeden** spevák...

Spomínaná je aj práca s chybou: *Chybě v procesu učení nespíláme, ale hájíme ji a dokonce ji vítáme. Vítáme chybu jako zprostředkovatele žákova opravdového poznání. ... Podporujeme děti, aby si chyby našly samy, a učíme je vysvětlovat, proč chybu udělaly.*

Môj názor je, že **chyby** boli, sú aj budú, ale **nemôžu byť vítané**. Ak lekár spraví chybu, má sa na čo tešiť, podobne aj robotník pri pásovej výrobe a to už nehovorím o opernom spevákovi. Ak spraví chybu vodič autobusu, tak sa mnohí majú na čo tešiť... Proste, deťom poviem, že chyba sa občas stane, ale snažme sa chybám vyvarovať, snažme sa o dôslednosť.

*

V opise Hejného metódy sa neraz používa **konfrontačná** argumentácia typu *V naší matematice, na rozdíl od ...*

Príklady:

Neizolujeme matematické zákonitosti – ani my.

Vycházíme z hluboké znalosti psychiky dětí – aj my.

Neokrádame děti o radost' z vlastného úspechu – ani my.

atď.

Memorovanie je v Hejného metóde zakázané, ale „*žiak si uvedomí, že by sa mu hodila napr. znalost' malej násobilky namiesto dlhého sčítovania 3+3+3+3.*“ Žiačik je na seba hrdý. Ale ani my mu nebránime aby na to prišiel sám... Všimnite si, že v Hejného metóde **znalost' násobilky** nie je **bifľovanie**.

*

Inde sa konštatuje, že *vzorce nie sú potrebné. Dieťa má poznatky, vytvorí si schémy a zovšeobecňuje: ... dostane 54/60. Čísla sa mu zdajú veľké, tak ich zmenší, napr. na 27/30. A potom ešte aj toto na 9/10.*

Podľa akého **pravidla** ich zmenšil? $\frac{a \cdot b}{a \cdot c} = \frac{b}{c}$? Aha, vzorček... Sme však

stále len pri počtoch v obore **Q** a nie pri matematike, kde tie písmená môžu byť aj dlhšie výrazy, napr. $n^2 - 7n + 5$. Pizzu ale nevieme rozdeliť na $n^2 - 7n + 5$ častí.

Podstatné na tom je, že **také zovšeobecnenie je len intuícia a nie je spoľahlivé**. Na vytvorenie Vety – a to je najužitočnejšia časť matematiky – treba dôkaz. Je to odstrašujúce slovo, ale dôkaz je potrebný...

*

Potom sa však objavilo toto:

Jednou z hlavných motiváci profesora Hejného pri vytvárení novej metódy byl dôraz na to, aby sa deti nenechali v živote manipulovať. Preto **učiteľ ve výuce nepredáva hotové poznatky**, ... učiteľ neodovzdáva vedomosti, lebo by žiaka pripravil o radosť z vlastného objavu; radosť je motorom ďalšej práce; ani rast kyticiek neurýchlime ich povytiahnutím... (to je parádny bonmot!)

Toto nepredávanie hotových poznatkov je ďalej rozvíjané a zdôrazňované: učiteľ len usmerňuje diskusiu žiakov. No čo, asi by sme aj na vedeckej konferencii mali nechať poslucháčov - kolegov, nech na to prídu sami, a prevezmeme si Fieldsovu medailu, lebo my to vieme, ale nepovieme...

Ten, kto prevezme hotové poznatky, je podľa terminológie ruského supervedca Maťuščina označený ako *intelektuálny príživník*. Tu pohár pretiekol. Veď prakticky všetci sme intelektuálni príživníci!!! Aj

Isaac Newton:

Ak som dovidel ďalej, bolo to preto, že som stál na pleciach obrov.

Protipól Newtona je malý génius, ktorý sa odmietne učiť, lebo by sa stal intelektuálnym príživníkom. Keďže ten malý leňoch **je naozaj génius**, tak vymyslí parný stroj. Na to mu ale povedia, že parný stroj už bol dávno vymyslený. Potom vymyslí dynamo. Aj to tu už bolo. Potom pušný prach. Hej, ale ten bol vymyslený dokonca oveľa dávnejšie. A vymyslí ešte niekoľko geniálnych vecí, lenže – nič nové.

NÍČ NOVÉ, lebo sa odmietol učiť, teda odmietol sa postaviť na plecia obrov.

Neveril som svojim očiam, keď som uvidel nápis:

žiaci sú schopní vymyslieť celú matematiku sami.

Ja si myslím, že len veľmi maličké percento žiakov by dokázalo objaviť riešenie kubického rovnice.

Percento žiakov, ktorí by objavili celú matematiku sami, je Schrödingerovsky kladné.

Ďakujem za pozornosť!